# КОНСТАНТИНОВ

# Городец, поездки на «копейке», «Море Лаптевых», две задачи и Турнир городов

Е. В. Хинко

Формально с Николаем Николаевичем Константиновым я познакомился весной 2005 года, перед очередным собеседованием в 9 класс 179 школы. Я приехал пораньше и ждал начала, а какой-то немолодой дяденька вышел из 312 кабинета и стал меня расспрашивать. О самом разном: про собеседования, какие задачи с прошлых разов показались мне интересными, про мои интересы и про что-то ещё, но остальные вопросы я уже не помню. Это и был Константинов.

Осознанное знакомство состоялось несколькими неделями позже в Городце, куда НикНик и Сергей Дориченко, который собственно и набирал мой класс, вывезли нас на три недели. Смена начиналась 11 июня, но Николай Николаевич и несколько моих будущих одноклассников («квартирьеров», как называл их Константинов) заехали на несколько дней раньше — 7 июня.

Как только мы приехали, Константинов провёл нам экскурсию по Городцу, после чего сказал, что надо растопить самовар, чтобы приготовить чай к обеду, и предложил нам, только что приехавшим, это сделать. Для меня, домашнего мальчика, имевшего к тому моменту нулевой опыт колки дров и растопки самовара, это было немного удивительно, но интересно: прям сразу с места в карьер и надо что-то делать руками. Дрова готовые, правда, уже были. Сейчас, глядя на участников Летних конференций Турнира городов, которые впервые видят самовар, я каждый год вспоминаю, как тогда смотрел на него и так же, как и они, думал, как эта штуковина работает. Надо сказать, что коллективный разум победил проблему, и кипяток к обеду был.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 20, 2022 (111–115)

Смена была рабоче-математической. То есть если ты не был в данный момент в бригаде «кухменов» (повара) или «кухбоев» (мытьё посуды), то предполагалось, что ты занят другими работами: выравнивание поля, ремонт лестницы к реке, строительство плота, изготовление кроватей, шпатлёвка стен и многое другое. И, конечно, работы по обеспечению быта.

Кроме работы, раз в два дня проходили математические занятия. Уже не помню, что и как на них было, только обрывки, но одну задачу оттуда я запомнил очень хорошо.

Задача 1. На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток. На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки, соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки, обе свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается (рис. 1). Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток (рис. 2). Можно ли достигнуть этой цели, если в исходной позиции имеется всего одна фишка и она стоит в левой нижней отмеченной клетке?

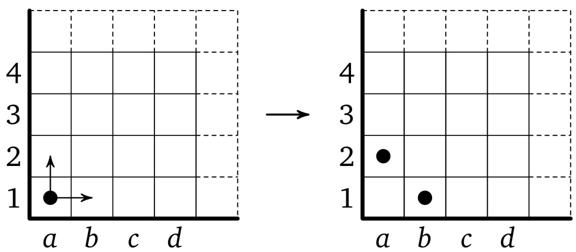

Рис. 1

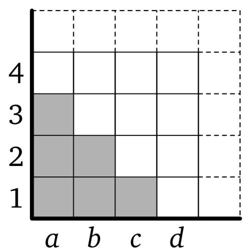

Рис. 2

Как я узнал уже сильно позже, это задача филдсовского лауреата Максима Концевича, которую он в своё время предложил на второй Турнир городов в 1981 году. Правда, это был пункт б). В оригинальной версии, которую давали на тургоре, был ещё пункт а), где фишек было уже 6 и они занимали все отмеченные клетки.

Я в тот момент был ещё совсем «зелёным» матшкольником, поэтому не думая начал строить пример, как впрочем и многие мои будущие одноклассники. После примерно десяти минут наших раздумий, Николай Николаевич дал нам другую версию задачи — попроще: нужно было выяснить, можно ли вывести фишку из фигуры, состоящей уже из 10 клеток, т. е. отсекающей первые четыре диагонали. Помню, что шестиклеточную версию за то занятие никто не решил, но решение для десятиклеточной задачи мы узнали (уже не помню, решил кто-то или нам рассказали).

Решение (десятиклеточный случай). Пусть исходная фишка, стоящая в $a1$, имеет вес 1. За ход она разбивается на две фишки веса $1/2$. И так далее, т. е. фишка на $i$-й диагонали имеет вес $1/2^{i-1}$. Подсчитаем общий вес доски, если бы в каждой клетке стояло по фишке. Нетрудно видеть, что он будет равен 4: сумма весов столбца $a$ равна

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^i}+\ldots=2,$$

сумма весов столбца $b$ равна 1, сумма весов столбца $c$ равна $1/2$ и т. д. Подсчитав сумму по всем столбцам, получим 4. Теперь заметим, что вес доски вне десятиклеточной фигуры равен

$$4-1-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}<1.$$

То есть даже если предположить, что мы заполнили фишками все клетки вне десятиклеточной области, их общий вес будет меньше 1, значит, вывести фишку не удастся.

Решение (шестиклеточный случай). Рассуждая аналогично решению десятиклеточного случая, получаем, что вес клеток вне шестиклеточной фигуры равен

$$4-1-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}>1,$$

т. е. противоречия не получается. Заметим теперь, что в столбце $a$ и строке 1 может в любой момент времени находиться не более чем по одной фишке. Другими словами, если мы смогли вывести исходную фишку за пределы области, суммарный вес фишек в первом столбце и первой строке не превосходит $2\cdot 1/8=1/4$. Вес всей оставшейся области, если предположить, что мы заполним фишками всю бесконечную доску, будет равен $3/4$, т. е. в полученной задаче вес не превосходит $3/4$. Таким образом, снова получаем, что вес фишек вне области не может достигать $1/4+3/4=1$. Противоречие.

По вечерам мы собирались и пели песни под гитару. В основном пел Сергей Александрович, но иногда брал гитару и Константинов. Я запомнил в его исполнении только «Море Лаптевых», его фирменный номер. Особенно здорово было, когда солировал Сергей, «соло» состояло из одного слова «нет», но этот дуэт был великолепен.

Городец был в некотором смысле продолжением системы эстонских лагерей Конста, правда в несколько видоизменённом формате.

Я ездил туда на протяжении 15 лет каждый год, и это было всегда прекрасное время. Там я научился готовить (отдельное спасибо Сергею Дориченко), работать молотком, проводить (с моим учителем математики Семёном Григорьевичем Слободником) технический водопровод из Угры и многому другому.

Отдельным приключением были поездки с Константиновым на машине. Думаю, у всех, кто с ним ездил на его «копейке», остались незабываемые впечатления. Николай Николаевич получил права, когда ему было уже за 70. Как он сам говорил, до этого его опыт вождения ограничивался велосипедом. Почти любая поездка сопровождалась элементами экстрима, но Николай Николаевич относился ко всему совершенно спокойно. Например, один раз после того, как он уснул за рулём по пути из Городца в Москву и машина перевернулась (его во многом спасло то, что он был пристёгнут), он, не получивший каких-либо особых повреждений, добравшись до Москвы, сразу поехал в школу. Машина подождёт! А в другой раз, встретив нас с автобуса в Юхнове, он вёз нас 15 км до Городца и по дороге спросил, хотим ли мы душ. Мы знали, что в Городце душа раньше не было, но подвоха не раскусили и ответили, что «хотим». Когда мы свернули с трассы на просёлочную грунтовку, Константинов разогнался и на скорости порядка 60 км/ч въехал в огромную лужу. Машину шикарно окатило, это и был обещанный душ! «Копейку», правда, повело в луже, и мы чуть не врезались в дерево.

В одно из последующих лет, когда мы уже закончили школу, но ещё не начали учиться в вузе (это состояние называлось «полустуденты»), Константинов в Городце давал нам «на подумать» задачи про канторово множество, его несчётность и что в отрезке $[0;1]$ на нём реализуются все действительные расстояния от 0 до 1.

Определил он множество классическим образом: возьмём отрезок $[0;1]$, разделим на три равные части, удалим интервал $(1/3;2/3)$, в оставшемся множестве из двух отрезков снова удалим средние трети и т. д. Мы над задачей подумали, но сходу решить не получилось. Николай Николаевич предложил подумать, как это множество описывается в троичной системе счисления. Как я уже потом узнал, это классическая идея, но когда думаешь и осознаёшь впервые, выглядит очень здорово: ведь с ней первая часть задачи (про несчётность) решается в одно касание, по аналогии с доказательством несчётности последовательностей из 0 и 1.

Тогда же Николай Николаевич рассказывал нам про аксиому выбора и связанные с ней идеи и дал «на подумать» такую задачу.

Задача 2. Пусть множество $A$ имеет мощность континуум. Разобьём его на два подмножества $B$ и $C$: $A = B \bigsqcup C$. Доказать, что одно из них имеет мощность континуум (без использования континуум-гипотезы).

Решение. Как известно, континуум — это мощность отрезка $[0; 1]$. Отрезок равномощен квадрату, поэтому положим $A = [0; 1] \times [0; 1]$. Теперь пусть есть некоторое разбиение $A$ на $B$ и $C$. Рассмотрим всевозможные горизонтальные отрезки $[0; 1]$ в нашем квадрате. Их очевидно континуум. Если в каждом из них найдётся точка множества $B$, то $B$ имеет мощность не менее чем континуум. Если же найдётся отрезок, состоящий только из точек множества $C$, значит, $C$ имеет мощность не менее чем континуум.

Я очень хорошо запомнил эту задачу, потому что идея мне очень понравилась. Впоследствии я снова столкнулся с ней. Через полтора года, когда я учился на втором курсе мехмата, наш преподаватель по действительному анализу Александр Николаевич Бахвалов дал нам её в качестве домашнего задания на одном их первых семинаров.

Там же в Городце я впервые начал проверять работы Турнира городов. Николай Николаевич знал, что я довольно неплохо владею немецким языком, и в какой-то год привёз из Москвы папку с работами Тургора из Гамбурга и нескольких австрийских городов. В тот год не нашли человека, на достаточном уровне владеющего немецким, который мог бы проверить эти работы, и Константинов предложил мне. Тогда в Городце я проверил всего несколько задач, всё-таки я ж туда не для этого приехал, но сами работы посмотрел (интересно же, как там немецкие и австрийские школьники пишут), и потом, уже вернувшись в Москву, пришёл в 179 школу на очередную проверку и сел проверять. Так и втянулся. А через полгода меня позвали помогать в оргкомитете Тургора, и я с головой погрузился в это замечательное детище Николая Николаевича, которым занимаюсь до сих пор.

---

Евгений Викторович Хинко, председатель центрального оргкомитета Турнира городов, школа № 179 г. Москвы

evgeny.v.khinko@turgor.ru